関手の充満忠実性の証明

コンパクト生成位相空間の圏 $\mathbf{CGTop}$ から、極度不連結コンパクトHausdorff空間の圏 $\mathbf{EDCHaus}$ 上の集合の前層の圏 $\widehat{\mathbf{EDCHaus}} = \mathbf{Set}^{\mathbf{EDCHaus}^{\mathrm{op}}}$ への関手

$$F : \mathbf{CGTop} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{EDCHaus}^{\mathrm{op}}}, \quad X \mapsto C(-, X)$$

が充満忠実であることを証明します。

ここで、コンパクト生成位相空間 X の定義として、「任意のコンパクトHausdorff空間 K からの連続写像 $g : K \to X$ に関して写像の連続性が判定できる（位相が緊密（coherent）である）」という標準的な定義を用います。

---

1. 忠実性 (Faithfulness) の証明

任意の対象 $X, Y \in \mathbf{CGTop}$ と、2つの連続写像 $f, g : X \to Y$ を考えます。これらが $F(f) = F(g)$ を満たすと仮定します。

関手 F の定義より、これは任意の $E \in \mathbf{EDCHaus}$ と任意の連続写像 $h : E \to X$ に対して、

$$f \circ h = g \circ h$$

が成り立つことを意味します。

ここで、1点空間 $\{*\}$ は極度不連結コンパクトHausdorff空間の対象（すなわち $\{*\} \in \mathbf{EDCHaus}$）です。任意の点 $x \in X$ に対し、恒等的に x を値に持つ連続写像 $h_x : \{*\} \to X\ (* \mapsto x)$ を考えることができます。

この h_x に対して上記の条件を適用すると、

$$f(x) = f(h_x(*)) = (f \circ h_x)(*) = (g \circ h_x)(*) = g(h_x(*)) = g(x)$$

が任意の $x \in X$ について成り立ちます。したがって $f = g$ となり、関手 F は**忠実**です。

---

2. 充満性 (Fullness) の証明

任意の自然変換 $\alpha : C(-, X) \to C(-, Y)$ が与えられたとき、$\alpha = F(f)$（すなわち $\alpha_E(h) = f \circ h$）を満たす連続写像 $f : X \to Y$ が存在することを示します。

写像 f の構成

1点空間 $\{*\} \in \mathbf{EDCHaus}$ を用いて写像 $f : X \to Y$ を定義します。
各 $x \in X$ に対し、先ほどと同様に写像 $h_x : \{*\} \to X\ (* \mapsto x)$ を対応させると、$\alpha_{\{*\}}(h_x)$ は $C(\{*\}, Y)$ の元（すなわち $\{*\}$ から Y への連続写像）になります。そこで、

$$f(x) := \alpha_{\{*\}}(h_x)(*)$$

によって写像 $f : X \to Y$ を定めます。

任意の $E \in \mathbf{EDCHaus}$ に対する $\alpha_E(h) = f \circ h$ の証明

任意の $E \in \mathbf{EDCHaus}$ と任意の連続写像 $h : E \to X$ を取ります。
E の任意の点 $e \in E$ に対し、包含写像 $i_e : \{*\} \to E\ (* \mapsto e)$ を考えます。これは連続写像です。

α の自然性（naturality）により、射 $i_e : \{*\} \to E$ に対して次の図式が可換となります：

$$
\begin{array}{ccc}
C(E,X) & \overset{\alpha_E}{\to} & C(E,Y) \\
\downarrow - \circ i_e & & \downarrow - \circ i_e \\
C(\{*\},X) & \overset{\alpha_{\{*\}}}{\to} & C(\{*\},Y)
\end{array}
$$

したがって、次の関係式が得られます：

$$\alpha_{\{*\}}(h \circ i_e) = \alpha_E(h) \circ i_e$$

この両辺を $\{*\}$ の点 $*$ で評価します。

- **左辺の評価:**
  $h \circ i_e : \{*\} \to X$ は $*$ を $h(e) \in X$ に写す写像、すなわち $h_{h(e)}$ そのものです。したがって、f の定義より以下になります。

$$\alpha_{\{*\}}(h \circ i_e)(*) = \alpha_{\{*\}}(h_{h(e)})(*) = f(h(e))$$

- **右辺の評価:**

$$(\alpha_E(h) \circ i_e)(*) = \alpha_E(h)(i_e(*)) = \alpha_E(h)(e)$$

これらが一致するため、任意の $e \in E$ に対して $\alpha_E(h)(e) = f(h(e))$、すなわち $\alpha_E(h) = f \circ h$ が成り立ちます。

f の連続性の証明

写像 $f : X \to Y$ が連続であることを示します。
X はコンパクト生成位相空間であるため、「任意のコンパクトHausdorff空間 K と任意の連続写像 $g : K \to X$ に対して、合成写像 $f \circ g : K \to Y$ が連続である」ことを示せば、f の連続性が従います。

任意のコンパクトHausdorff空間 K と連続写像 $g : K \to X$ を固定します。
Gleasonの定理により、任意のコンパクトHausdorff空間 K には、ある極度不連結コンパクトHausdorff空間 $E(K)$ からの全射連続写像

$$p : E(K) \longrightarrow K$$

（Gleason被覆）が存在します。コンパクト空間からHausdorff空間への全射連続写像は**商写像（quotient map）**となります。

ここで、合成写像 $g \circ p : E(K) \to X$ を考えます。$E(K) \in \mathbf{EDCHaus}$ であるため、先ほど示された一般の性質（$\alpha_E(h) = f \circ h$）を適用すると、

$$\alpha_{E(K)}(g \circ p) = f \circ (g \circ p) = (f \circ g) \circ p$$

が成り立ちます。

$\alpha_{E(K)}(g \circ p)$ は $C(E(K), Y)$ の元であるため、写像 $(f \circ g) \circ p : E(K) \to Y$ は連続写像です。
いま、$p : E(K) \to K$ は商写像であるため、商位相の普遍性により、$(f \circ g) \circ p$ が連続であれば、$f \circ g : K \to Y$ **も連続**でなければなりません。

これが任意のコンパクトHausdorff空間 K と連続写像 $g : K \to X$ について成り立つため、X がコンパクト生成位相空間であることから $f : X \to Y$ は連続です。

以上により、$\alpha = F(f)$ を満たす連続写像 f が存在することが示され、関手 F は**充満**です。

結論

関手 $X \mapsto C(-, X)$ は忠実かつ充満であるため、**充満忠実（fully faithful）**であることが証明されました。

■